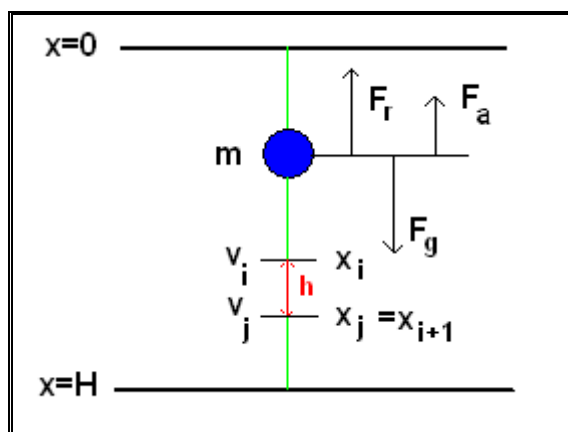


Capítulo 17

Exemplos selecionados

Queda de uma esfera através dum fluido

Uma esfera de massa m e raio R cai com velocidade inicial zero a partir de $x = 0$. Subdividimos a distância da queda, H , em n intervalos, cada um de comprimento $h = H/n$.



Para cada intervalo calculamos a velocidade média usando $(v_i + v_j)/2$. Ao longo de cada intervalo, consideramos a aceleração como sendo constante. A aceleração no intervalo número j (= intervalo- j) é dada por

$$a_j := (v_j - v_i)/(t_j - t_i) = g[u - ((v_i + v_j)/(2v_1))^2] \quad (1)$$

A constante v_1 é definida por $v_1^2 := 8Rg\rho_c/(3C\rho)$ onde ρ = densidade do fluido (1000 kg/m^3 para água), ρ_c = densidade da esfera (7800 kg/m^3), R = raio (4mm), $C = 0.4$ e $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

O tempo de caída pelo intervalo- j é

$$t_j - t_i = (2h)/(v_i + v_j) \quad (2)$$

Esta expressão introduzimos em equação (1), juntamente com a abreviatura

$$b := g \cdot h / (2v_1)^2 \quad (3)$$

Chegamos, assim, à seguinte **fórmula de iteração**:

$$v_{i+1} = [(v_i^2 + 4buv_1^2(1+b))^{1/2} - bv_i]/(1+b) \quad (4)$$

Em vez de v_j temos escrito v_{i+1} , além disso temos $u := 1 - \rho/\rho_c$. Para determinar o tempo de queda, temos que somar os tempos parciais t_j , gastos nos n intervalos, veja eq. (2). Calculamos este tempo da seguinte maneira:

$$T = \sum_{j=1}^n t_j = \frac{2H}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{v_i + v_{i+1}} \quad (5)$$

```

Sub esfera() 'Queda duma esfera em fluido
  rc = 7800: rfl = 1000
  R = 0.004: C = 0.4: g = 9.8: H = 0.2
  v0 = 0: t0 = 0
  n = 100: s = 0
  u = 1 - rfl / rc
  v1 = 8 * R * g * rc / (3 * rfl * C)
  b = g * H / (2 * n * v1)
  d = 4 * b * u * v1 * (1 + b)

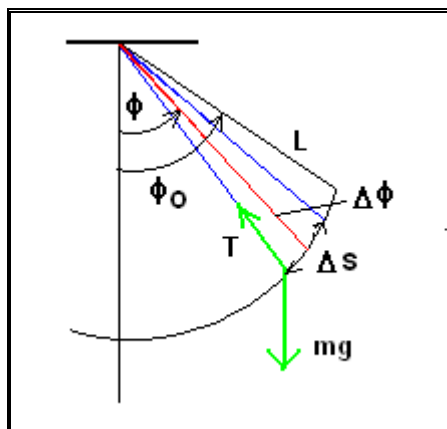
  For i = 1 To n Step 1
    v = ((v0 ^ 2 + d) ^ 0.5 - b * v0) / (1 + b)
    s = s + 1 / (v0 + v) ' cálculo da soma
    v0 = v
  Next
  MsgBox "T= " & Format(2 * H * s / n, "0.00000")
End Sub

```

Resultado: $T = 0,25111$ segundos para $H = 20\text{cm}$

O pêndulo com amplitude arbitrária

A equação de movimento é $y''(t) = -\text{sen } y(t)$ com os valores iniciais $y(0)$ e $y'(0)$. Ninguém será capaz de resolver esta equação em forma "fechada". Uma solução aproximada obtém-se somente por meios numéricos. Neste parágrafo, vamos desenvolver um método iterativo muito simples. Trata-se duma queda com vínculo.



Esta vez subdividimos a amplitude φ_0 em n partes de igual tamanho $\Delta\varphi = \varphi_0/n$.

O pêndulo precisa Δt segundos para percorrer o ângulo $\Delta\varphi = \Delta s/L$. A soma de todos os elementos Δt dá o período $T := T_0 \cdot K_0$ onde K_0 é um fator de correção, dependendo do ângulo φ_0 , e $T_0 = 2\pi (L/g)^{1/2}$ é o período do pêndulo simples. Suponhamos que a aceleração tangencial seja constante no intervalo Δt . Temos

$$a_t = (v_{i+1} - v_i)/\Delta t = g \cdot \text{sen}\varphi \quad (6)$$

A velocidade média no intervalo Δt é $(v_i + v_{i+1})/2$, e o arco, passado pelo pêndulo em Δt segundos, será $\Delta s = (v_i + v_{i+1}) \Delta t/2 = L \Delta\varphi$. Assim, obtemos

$$v_{i+1} = v_i + g \Delta t \text{sen}\varphi \quad (7)$$

$$\Delta t = 2 L \Delta\varphi / (v_i + v_{i+1}) \quad (8)$$

Substituindo Δt da primeira equação pelo Δt da segunda, resulta a seguinte **fórmula de iteração** para a velocidade

$$v_{i+1} = (v_i^2 + 2 L \Delta\varphi g \text{sen}\varphi)^{1/2} \quad (9)$$

A soma de todos os Δt entre $\varphi = \varphi_0$ e $\varphi = 0$ proporciona o tempo $T/4$, e o período completo é

$$T = \frac{8L\varphi_0}{n} \sum_{\varphi_0}^0 \frac{1}{v_i + v_{i+1}} \quad (10)$$

O fator de correção vem dado por

$$K_0 = \frac{T}{T_0} = \frac{4\varphi_0}{n\pi} \sqrt{gL} \sum_{\varphi_0}^0 \frac{1}{v_i + v_{i+1}} \quad (11)$$

K_0 depende, aparentemente, de g e L . Mas, isso não é o caso, pois, se introduzirmos uma grandeza u sem dimensão como

$$v := u (g L)^{1/2} \quad (12),$$

podemos eliminar $(g L)^{1/2}$ e nós obtemos $v_i + v_{i+1} = (g L)^{1/2} (u_i + u_{i+1})$, onde pusemos

$$u_{i+1} := (u_i^2 + 2 \Delta\varphi \text{sen}\varphi)^{1/2}.$$

Finalmente, resulta

$$K_0 = \frac{4\phi_0}{n\pi} \sum_{\phi_0}^0 \frac{1}{u_i + u_{i+1}} \quad (13)$$

```

Sub pendulo()
fi1 = 30 ' ângulo em graus
Pi = 3.141592654
fi0 = fi1 * Pi / 180
n = 500
v0 = 0: t0 = 0
For i = 1 To n Step 1
    dfi = fi0 / n
    fi2 = fi0 - dfi / 2
    b = 2 * dfi * Sin(fi2 - (i - 1) * dfi)
    v = (v0 ^ 2 + b) ^ 0.5
    t = t0 + 1 / (v0 + v)
    t0 = t: v0 = v
Next
MsgBox "K0= " & Format(4 * fi0 / (n * Pi) * t, "0.00000")
End Sub

```

Resultado: $K_0 = 1,01742$ para $\Phi_0 = 30$ graus. $T = K_0 \cdot T_0$

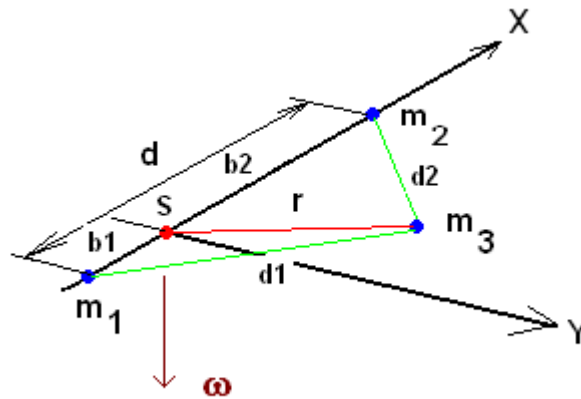
Para Δt suficientemente pequeno, a precisão do método de iteração pode produzir resultados com até três ou quatro dígitos decimais corretos.

Trajетória Lua-Terra (Problema restrito)

No chamado "**Problema restrito** de três corpos" movem-se dois corpos pesados em torno do centro de massa comum enquanto um terceiro corpo leve move-se no mesmo plano que os corpos pesados. Podemos imaginar-nos uma sonda espacial m_3 que se move no campo gravitacional da Terra m_1 e da Lua m_2 . A influencia do Sol não é tomada em conta.

Na figura vemos Terra e Lua sobre o eixo-x de um sistema de coordenadas que gira com velocidade angular ω constante.

Os dois corpos descrevem círculos complanares em torno do seu centro de massa.



A Terra tem do Sol a distância $b_1 = m \cdot d$, sendo $m := m_2 / (m_1 + m_2)$. A distância entre Sol e Lua é $b_2 = m' \cdot d$ com $m' = 1 - m$. A velocidade angular tem a direção do eixo-z e o seu valor vem dado pela expressão $\omega^2 = G (m_1 + m_2) / d^3$.

Num sistema inercial, a segunda Lei de Newton rezaria $m_3 \mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, onde \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 são as forças devido a m_1 e m_2 . Em nosso sistema, não inercial, temos que introduzir duas forças "inerciais". São a força centrífuga: $\mathbf{F}_c = -m_3 \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ e a força CORIOLIS $\mathbf{F}_{cor} = -2 m_3 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel}$.

As equações de movimento para as duas coordenadas de m_3 são

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x + 2 \frac{dy}{dt} - \frac{m'(x+m)}{d_1^3} - \frac{m(x-m')}{d_2^3} \quad (6)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = y - 2 \frac{dx}{dt} - \frac{m'y}{d_1^3} - \frac{my}{d_2^3} \quad (7)$$

A unidade de tempo foi escolhido de tal forma que $\omega = 1$, ou seja para que o tempo para uma rotação do sistema de coordenadas fosse $T = 2\pi$. As distâncias d_1 e d_2 são

$$d_1^2 = (b_1 + x)^2 + y^2 = (m \cdot d + x)^2 + y^2 \quad (8)$$

$$d_2^2 = (b_2 - x)^2 + y^2 = (m \cdot d - x)^2 + y^2 \quad (9)$$

A massa será $m = 0.012277471$, se tomarmos $d = 1$.

As condições iniciais serão $x_0 = 0.994$ (ou seja, do lado direito da Lua), $y_0 = 0$, $dx(0)/dt := vx(0) = 0$ e $dy(0)/dt := vy(0) = -2.1138987966945$.

Esta enorme quantidade de casas decimais é necessária, pois os cálculos são muito sensíveis com respeito a variações delas. Nos primeiros tempos dos vôos espaciais, foi absolutamente necessário de não permitir uma diferença da "injection speed" de 10840 m/s por mais de 1 m/s. Com uma diferença de > 2 m/s, a Lua não houvesse podido ser atingido, pois não houve possibilidade de corrigir a trajetória durante o vôo.

Você pode estudar, agora, estes fatos usando o seguinte programa. (Na época dos primeiros PCs, o cálculo da trajetória durava, numa HP-85, 4 horas!)

```

Sub Runge_Kutta2 ()
'para um sistema com x''=F(t,x,y,u,v) e y''=G(t,x,y,u,v)
Range("A10:E4000").Clear
t0 = Cells(1, 2).Value
x0 = Cells(2, 2).Value
y0 = Cells(3, 2).Value
u0 = Cells(4, 2).Value
v0 = Cells(5, 2).Value
h = Cells(6, 2).Value
imax = Cells(7, 2).Value
t = t0: x = x0: u = u0: y = y0: v = v0
Cells(10, 1).Value = t
Cells(10, 2).Value = x
Cells(10, 3).Value = y
Cells(10, 4).Value = u 'vx
Cells(10, 5).Value = v 'vy
For i = 1 To imax Step 1
  F1 = F(t, x, y, u, v) ' ax
  G1 = G(t, x, y, u, v) ' ay
  t = t0 + h / 2
  x = x0 + u * h / 2: u = u0 + F1 * h / 2:
  y = y0 + v * h / 2: v = v0 + G1 * h / 2
  F2 = F(t, x, y, u, v): G2 = G(t, x, y, u, v)
  x = x0 + u * h / 2: u = u0 + F2 * h / 2:
  y = y0 + v * h / 2: v = v0 + G2 * h / 2
  F3 = F(t, x, y, u, v): G3 = G(t, x, y, u, v)
  t = t0 + h
  x = x0 + u * h: u = u0 + F3 * h
  y = y0 + v * h: v = v0 + G3 * h
  F4 = F(t, x, y, u, v): G4 = G(t, x, y, u, v)
  x = x0 + h * u0 + h * h * (F1 + F2 + F3) / 6
  y = y0 + h * v0 + h * h * (G1 + G2 + G3) / 6
  u = u0 + h * (F1 + 2 * F2 + 2 * F3 + F4) / 6
  v = v0 + h * (G1 + 2 * G2 + 2 * G3 + G4) / 6
  Cells(10 + i, 1).Value = t
  Cells(10 + i, 2).Value = x
  Cells(10 + i, 3).Value = y
  Cells(10 + i, 4).Value = u
  Cells(10 + i, 5).Value = v
  t0 = t: x0 = x: y0 = y: u0 = u: v0 = v
Next i
End Sub

```

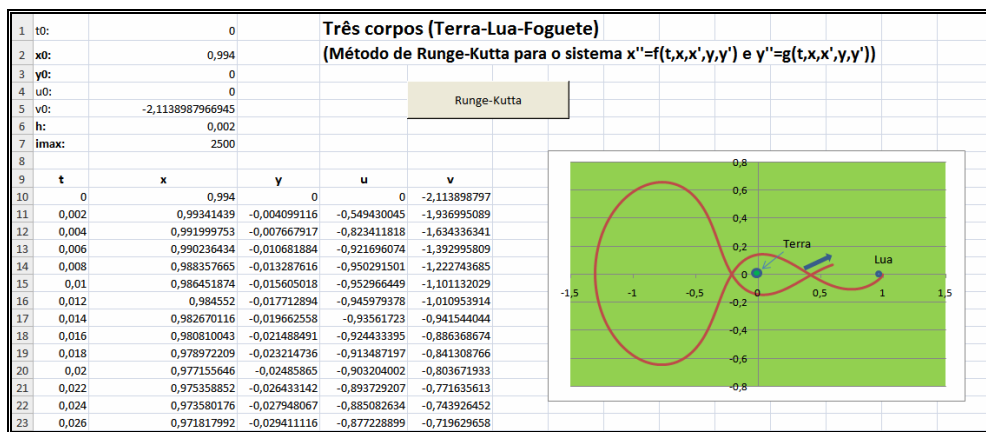
```

Function F(t, x, y, u, v)
m = 0.012277471: mu = 1 - m
r1 = ((x + m) ^ 2 + y * y) ^ (3 / 2)
r2 = ((x - mu) ^ 2 + y * y) ^ (3 / 2)
F = x + 2 * v - mu * (x + m) / r1 - m * (x - mu) / r2
End Function

Function G(t, x, y, u, v)
m = 0.012277471: mu = 1 - m
r1 = ((x + m) ^ 2 + y * y) ^ (3 / 2)
r2 = ((x - mu) ^ 2 + y * y) ^ (3 / 2)
G = y - 2 * u - mu * y / r1 - m * y / r2
End Function

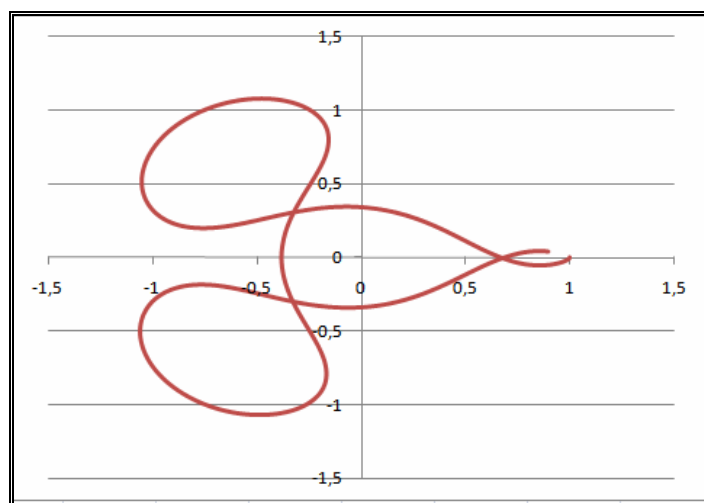
```

Na figura da planilha, observamos uma trajetória de "regresso" que nunca atingirá a Terra.



Posição da Terra: $x(0) = -0,01228$, $y(0) = 0$ e a da Lua: $0,9887$, $y(0) = 0$. A sonda parte no lado direito da Lua em $x(0) = 0,994$ e $y(0) = 0$.

Na seguinte figura, temos $v_0 = -2,0325$, $h = 0,002$ e $imax = 5500$

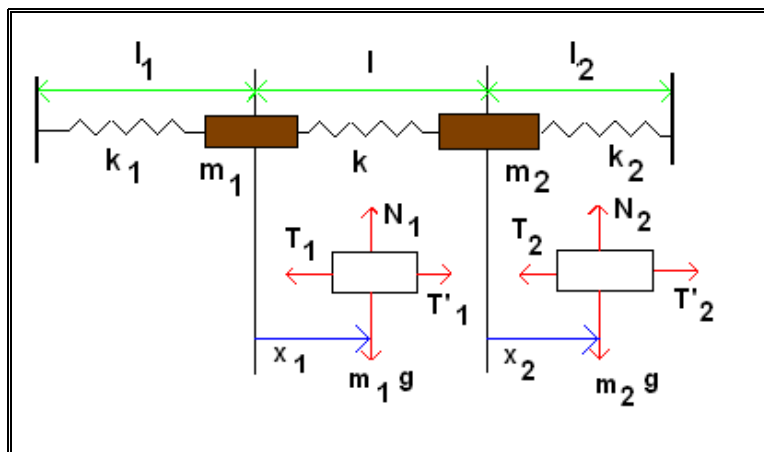


Osciladores acoplados

(Compare com **Interferência** no capítulo 5)

Agora vamos estudar o caso de dois osciladores acoplados, trocando energia entre si mesmos.

Consideramos o modelo ilustrado na seguinte figura:



Duas "partículas" de massas m_1 e m_2 são presas uma à outra e a paredes fixas por molas. No estado relaxado, as molas têm os comprimentos l_{01}, l_0 e l_{02} . Na posição de equilíbrio, elas têm o comprimento l_1 e l_2 (neste estado as molas sim podem ser esticadas, ou seja, l_1 não necessariamente é igual a l_{01} , etc.).

Sobre a massa m_1 atuam quatro forças: $m_1\mathbf{g}$, \mathbf{N}_1 , \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}'_1 , analogamente para m_2 .

A segunda lei de Newton para m_1 e m_2 reza:

$$m_1\mathbf{g} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}'_1 = m_1 \mathbf{a}_1 \quad (1)$$

$$m_2\mathbf{g} + \mathbf{N}_2 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}'_2 = m_2 \mathbf{a}_2 \quad (2)$$

Para os deslocamentos (supomos que $x_2 > x_1$) podemos escrever

$$m_1x_1'' = -k_1(s_1 + x_1) + k(s + x_2 - x_1) \quad (3)$$

$$m_2x_2'' = -k(s + x_2 - x_1) + k_2(s_2 - x_2) \quad (4)$$

Os coeficientes significam $s = l - l_0$, $s_1 = l_1 - l_{01}$, $s_2 = l_2 - l_{02}$, ou seja, eles são os alongamentos que as molas já têm no estado de equilíbrio.

A energia potencial do sistema vem dada pela seguinte expressão

$$E_p = k_1(s_1 + x_1)^2/2 + k(s + x_2 - x_1)^2/2 + k_2(s_2 - x_2)^2/2 \quad (5)$$

Supomos agora, simplificando, que as molas estejam, no estado de equilíbrio, distendidas e que tenham os mesmos comprimentos. Neste caso particular, as equações de movimento (3) e (4) assumem as seguintes formas

$$x_1'' = -ax_1 + bx_2 \quad (6)$$

$$x_2'' = -cx_2 + dx_1 \quad (7)$$

A equação para x_1 contém com x_1 também x_2 , e na equação para x_2 parecem tanto x_2 quanto x_1 . Ambas as equações estão, por isso, acopladas, elas formam um sistema de duas equações diferenciais acopladas.

As constantes são definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a &:= (k + k_1)/m_1, \\ b &:= k/m_1, \\ c &:= (k + k_2)/m_2, \\ d &:= k/m_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Resolveremos o sistema (6)-(7) numericamente. (Nos limitaremos a considerar o caso particular de duas massas iguais, tomando $k_1 = k_2 := k_0$ e $a = c = (k+k_0)/m$ e $b = d = k/m$.)

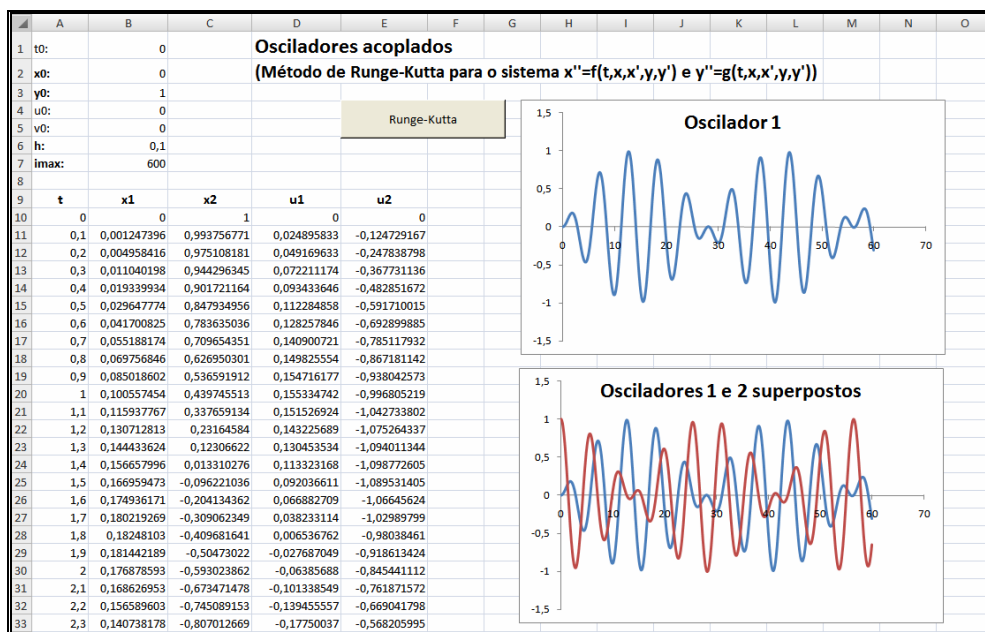
No começo, a massa m_2 foi deslocada por $x_2(0) = 1$ e logo liberada, enquanto m_1 estava em $x_1(0) = 0$ (temos $m_1 = m_2$). Logo de soltar o segundo oscilador, observamos como as suas oscilações são transmitidas para o primeiro e que a fase de deslocamento do oscilador m_1 está sempre atrasada de um ângulo de 90° em relação ao oscilador 2, que começa o movimento. (Precisa-se mover o gráfico de m_1 de 90° à esquerda, para obter fases idênticas.) Devido à defasagem entre os dois osciladores, há uma troca de energia entre eles.

Ambas as massas executam um movimento de batimento. Da figura podemos ver que o tempo entre dois valores mínimos da amplitude (= tempo do batimento) é de 28 s. O período da oscilação própria é aproximadamente de 5,5 s. A primeira figura mostra somente o oscilador 1, o que faz que podemos ver os pormenores do movimento com maior nitidez. Usamos o programa "Runge-Kutta2" com as seguintes funções:

```

Function F(t, x, y, u, v)
a = 1.25: b = 0.25: c = a: d = b
F = -a * x + b * y
End Function
Function G(t, x, y, u, v)
a = 1.25: b = 0.25: c = a: d = b
G = -c * y + d * x
End Function

```



A segunda figura mostra os deslocamentos das massas m_1 e m_2 superpostos no mesmo gráfico. ($x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$).

O programa permite fazer um estudo completo das oscilações com diferentes condições iniciais. Podemos detectar que existem dois modos de oscilação, fala-se de *modos normais* ou *fundamentais*, para os quais a defasagem é 0° ou 180° e nos quais não há transferência de energia.

O *primeiro modo normal* temos quando $x_1(0) = x_2(0) = A$, p. ex. $A = 1$. Os dois osciladores movem-se em fase. A mola do centro não sofre deformação e, portanto, não exerce força sobre as massas. elas movem-se como se não estivessem acopladas. Ambas massas oscilam com a mesma frequência $\omega_0 = (k_0/m)^{1/2}$.

No *segundo modo normal*, os dois osciladores movem-se em oposição de fase (temos uma diferença de fase de π) com $x_1(0) = -A$ e $x_2(0) = A$ ($=1$). A frequência é agora maior do que a frequência sem acoplamento $\omega = (\omega_0^2 + 2k/m)^{1/2}$, pois nesse caso, o centro da mola de acoplamento fica sempre em repouso, isso é como se fosse reduzido o comprimento da mola central à metade do comprimento original, ou, o que é o mesmo, como sua constante de

mola fosse agora 2k. (Podemos chamar os modos fundamentais de modos *puros*, os outros serão modos *mistos*.)

Em todos os outros casos, observamos *batimentos*, ou seja, uma variação nas amplitudes dos osciladores. Este fenômeno ocorre quando dois movimentos harmônicos simples que têm a mesma direção e frequências diferentes interferem. O resultado da superposição é especialmente interessante quando as amplitudes são iguais. Nesse caso, podemos observar uma flutuação de amplitude.

Qual a velocidade de uma bala no cano? Qual a velocidade do projétil quando sai da boca do cano?

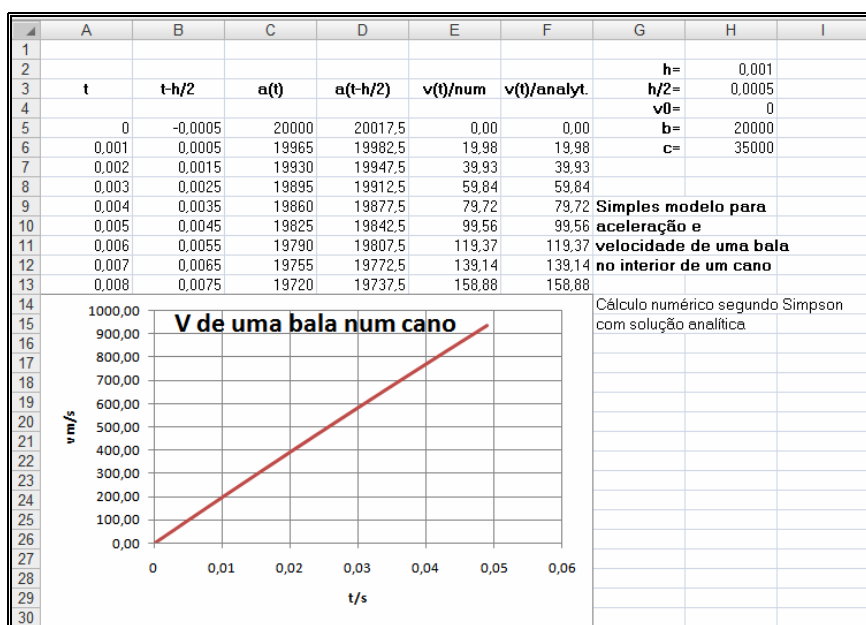
O cano de um rifle tem 45cm de comprimento, o de um canhão tem 3,60m. Estes são dados que variam, obviamente, com o produtor e com o tempo. Para responder às perguntas postas, aplicamos, primeiro, um modelo simples. Em seguida vamos nos basear em valores experimentais. O nosso tratamento vai fazer uso do método de Simpson.

1. Modelo simples para a aceleração

Usaremos, primeiro, o seguinte modelo linear:

$$a(t) = b - ct \text{ para } 0 < t < 0,05\text{s}; a(t) = 0 \text{ de resto}$$

Podemos adaptar as constantes b e c à velocidade final conhecida. (Sabe-se que uma bala atirada por um fuzil sai do cano com a velocidade de $\approx 900\text{m/s}$.) A seguinte planilha mostra os resultados para $b = 20000$ e $c = 35000$.



A velocidade cresce quase linearmente e a bala sai, depois de 0,049 segundos, com a velocidade de ≈ 938 m/s.

Para o modelo escolhido, a velocidade é $v(t) = bt - ct^2/2 + v_0$.

Entradas:

A5: 0; B5: =A5-H\$3; C5 = SE(A5<=0,05; H\$5-H\$6*A5;0); copiar até C60.

D5: =SE(B5<=0,05;H\$5-H\$6*B5;0); E5: =H4. Copiar D5 até D60.

F5: =H\$5*A5-H\$6*A5^2/2+H\$4 (solução analítica)

A6: =A5+H\$2; copiar até A60. B6: =A6-H\$3; copiar até B60

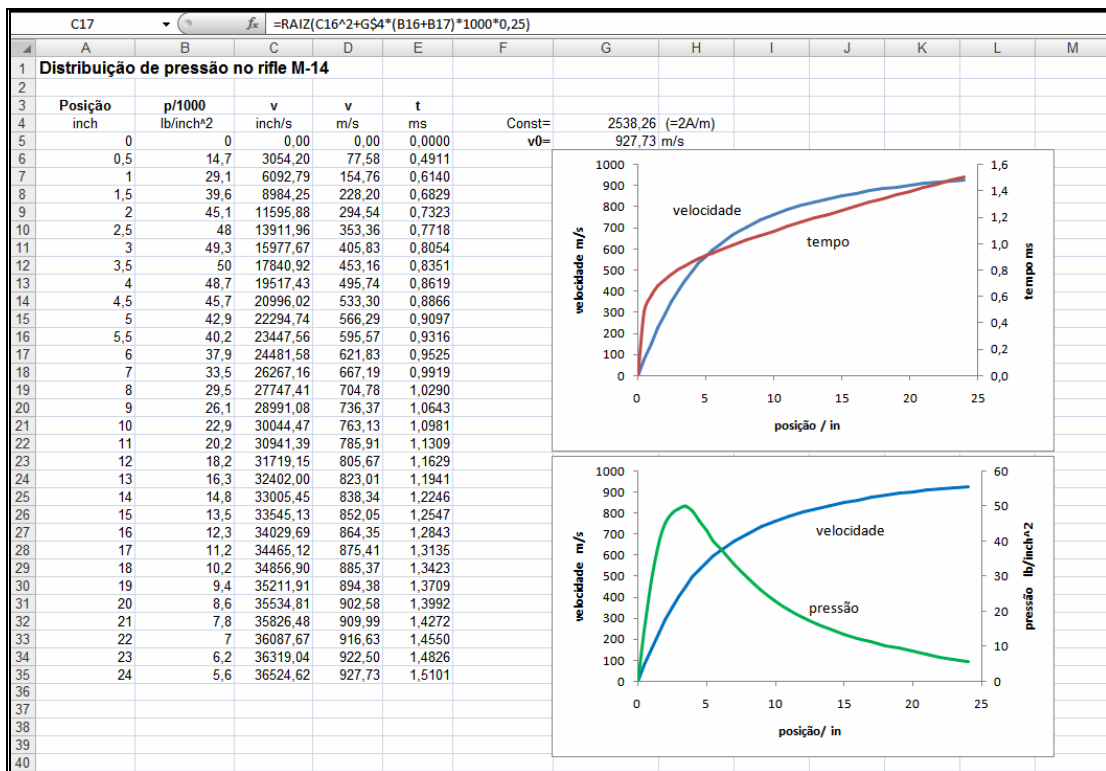
E6: =H\$2*(C5+4*D6+C6)/6+E5 (Simpson); copiar até E60

2. Modelo realista

Agora utilizamos os dados experimentais da distribuição da pressão no interior do cano do rifle M14 (M.L. James et al. *Applied Numerical Methods*, International Textbook Co., 1967)

Dados: $m = 0,0215$ lb (=9,75g); seção transversal do cano: $A = 0,07069$ inch² (= 0,456 cm²).

Na planilha, encontramos o perfil da distribuição de pressão ao longo do cano.



Da lei de conservação da energia no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ resulta para a velocidade

$$\dot{x}_{i+1} = \sqrt{\dot{x}_i^2 + \frac{2A}{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx}$$

Para o tempo obtemos uma fórmula de recursão: $t_{i+1} = t_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \dot{x}^{-1} dx$

As integrais serão aproximadas pelo médio aritmético.

Entradas:

C6: =RAIZ(G\$4*(B5+B6)*1000*0,5/2); a partir de C18 temos1000*0,5

E6: =3*A6/C6 (=valor inicial para t)

C7: =RAIZ(C6^2+G\$4*(B6+B7)*1000*0,25); a partir de C18:1000*0,5

E7: =E6+((1/C6+1/C7)*0,25)*1000 até E17

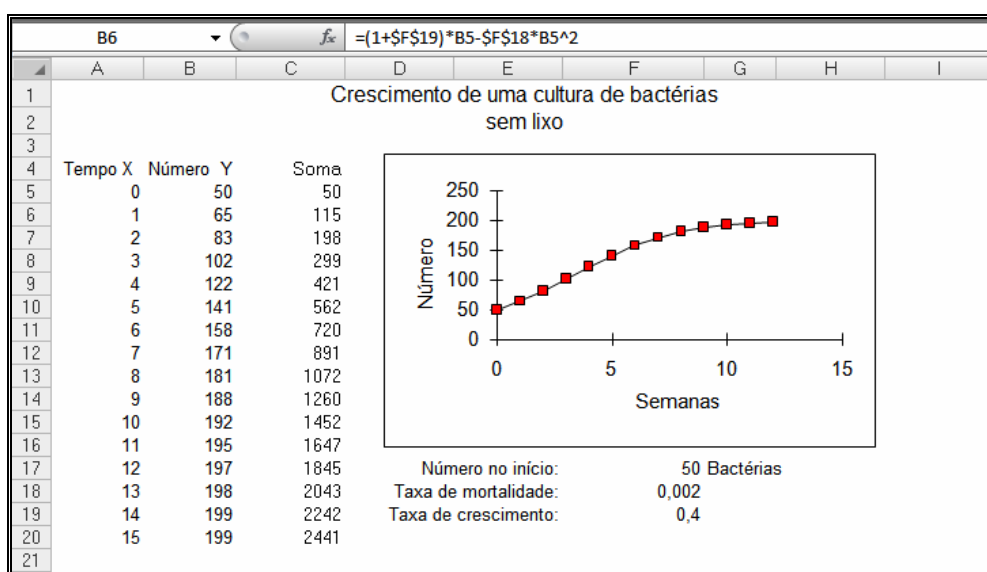
E18: =E17+((1/C17+1/C18)*0,5)*1000 até E35

Depois de $\approx 1,5$ ms, a bala sai do cano com uma velocidade de ≈ 927 m/s.

A vida difícil das bactérias.

No seguinte exemplo, estudamos o crescimento de uma cultura de bactérias. No primeiro caso, supõe-se que as bactérias morrerão devido ao limitado espaço do ambiente. Neste caso, a sua taxa de mortalidade vai ser proporcional ao número de bactérias já presentes.

O número de bactérias no fim da semana x vai ser $y = (1+p/100)y - (r \cdot y)y$ onde p é o fator de crescimento semanal e r é o fator de mortalidade por semana.



Entradas:

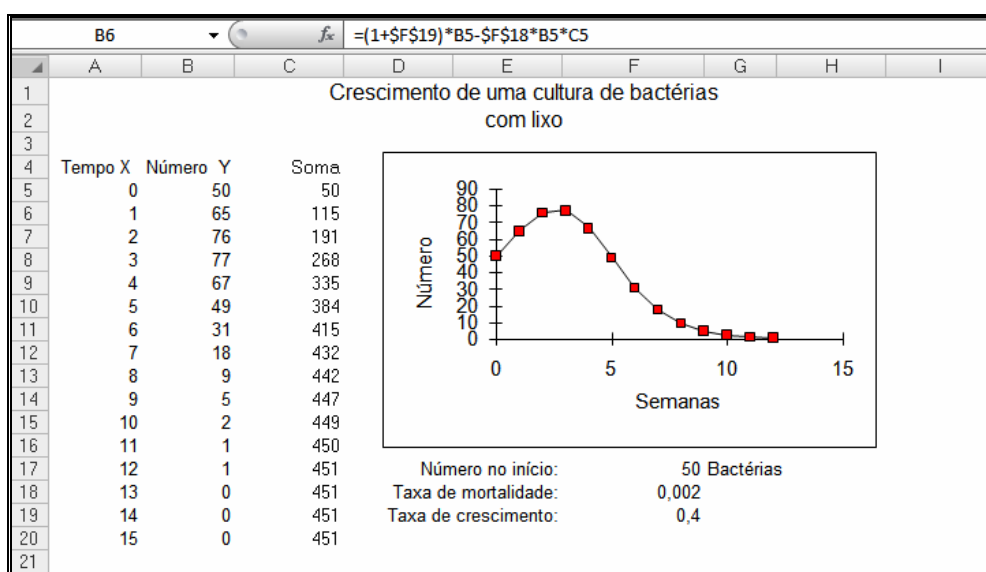
B5: =F17 (população inicial)

B6: =(1+F\$19)*B5-F\$18*B5^2; copiar até B20

Para o gráfico foi selecionado 1p como largura da linha.

O modelo mostra que a cultura tende a um valor limite de 200 bactérias.

Muito diferente será a situação, se levarmos em conta o lixo que as bactérias produziram e deixaram na cultura. O número de bactérias no fim da x-ésima semana vem dado pela seguinte relação $y = (1+p/100)y - (r \cdot n)y$ onde n é o número total das bactérias que viveram na cultura.



As bactérias se asfixiam no próprio lixo!

Entradas:

C5: =B5; C6: =B6+B5; copiar até C20

B5: =F17

B6: =(1+F\$19)*B5-F\$18*B5*C5; copiar até B20

Passeio aleatório de uma molécula

Nesta seção, queremos simular o caminho aleatório de uma molécula num gás. Isto é o modelo matemático para uma família muito ampla de processos. (Uma analogia é o caminho pouco controlado de um bêbado num campo aberto. Após cada passo, ele se esquece para onde ia e toma um rumo diferente. Suporemos que ele inicia seu caminho aleatório num poste no meio do campo, a nossa origem das coordenadas. O nosso objetivo é determinar onde o bêbado se encontra após um numero N de passos.)

Para a investigação análoga no caso de uma molécula num gás, precisamos de algumas fórmulas da estocástica:

1. O livre percurso médio λ de uma molécula de gás é dado pela formula

$$\lambda = 31073 \frac{T}{pd^2}$$

d = diâmetro da molécula e λ são expressados em Angström (10^{-10} m)
 p = pressão do gás, mede-se em mbar

Para $T = 300$ K, $p = 1000$ mbar e $d = 3E-10$ m, temos $\lambda = 1036$ Angström.

2. Se a molécula se encontra, após uma colisão, no ponto $P(x,y)$, então percorrerá, em seguida, a distância s sob o ângulo β (medida em relação ao eixo-X) até o ponto $P' = (x',y')$ da próxima colisão. As suas coordenadas são

$$\begin{aligned}x' &= x + s \cos(\beta) \\ y' &= y + s \sin(\beta)\end{aligned}$$

onde $s = -\lambda \ln R_1$ e $\beta = 2\pi R_2$. R_1 e R_2 são números aleatórios que o Excel determina com =ALEATÓRIO().

Entradas:

1. Na linha 10, encontram-se os valores iniciais de todos os dados:
 B10: 0 (=R1); C10: 0 (=R2); D10: 0; E10: =G\$1; F10:H10 0
2. Na linha 11, colocamos as fórmulas que copiamos até a linha 210
3. B11: =ALEATÓRIO() (=R1); C11: =ALEATÓRIO() (=R2)
4. D11: =2*PI()*B11; E11: =-G\$1*LN(C11); F11: =E11+F10
 G11: =G10+E11*COS(D11); H11: =H10+E11*SEN(D11)
5. Em F5 temos a distância linear entre o ponto inicial e o ponto final, ou seja, F5: =RAIZ(H210^2+G210^2)
6. F6 contém o livre percurso médio, ou seja =F210/A210

Para o gráfico, selecionamos o intervalo G10:H210. Todas as vezes que pressionamos a tecla F9, obtemos uma nova simulação (cálculo manual). A molécula começa o passeio em (0,0) e faz $N = 200$ colisões.

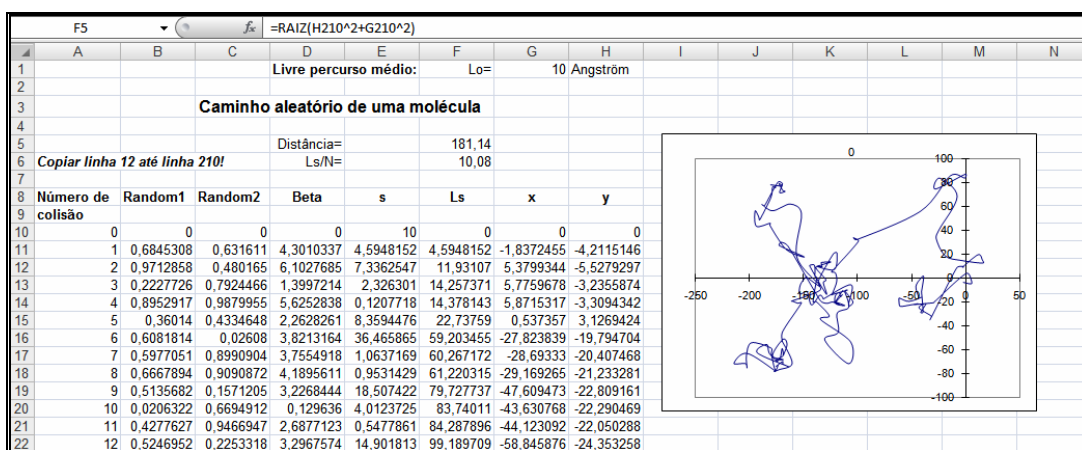
Para simular colisões moleculares no computador, precisamos da distribuição dos livres percursos médios no gás. Sabe-se que eles seguem uma

distribuição exponencial e que a função densidade é $f(x) = e^{-x/\lambda} / \lambda$.

Finalmente, a molécula encontra-se na distância $L = \sqrt{x_N^2 + y_N^2}$ da origem.

L/N é uma boa estimativa de λ .

(A base teórica de nosso tema pode-se encontrar em F.J. Mehr, *Simulation von stochastischen Trajektorien*, Praxis d. Naturwissenschaften, Physik 11,329,1983.)



O efeito Compton

A.H. Compton realizou, em 1923, experimentos nos quais raios X eram espalhados por um alvo de grafite. O comprimento de onda dos raios espalhados por um dado ângulo θ , medido em relação à direção incidente, era determinado utilizando a difração de Bragg. Compton mostrou que a radiação espalhada tinha uma frequência mais baixa do que a incidente.

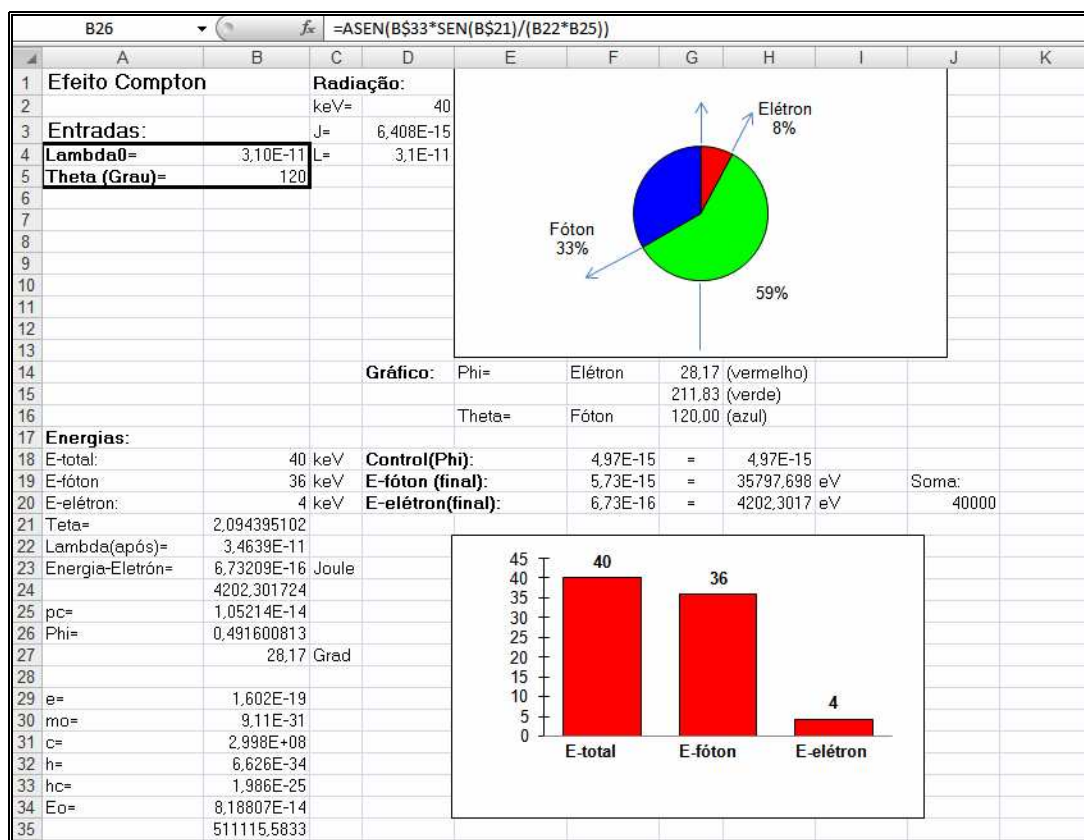
Modelo:

Antes da colisão, temos um elétron em repouso e um fóton λ incidente, depois da colisão, vemos um fóton λ' espalhado e um elétron que se move com energia cinética $E_c = hc/\lambda - hc/\lambda'$. (O fóton incidente dá origem a um novo fóton de menor energia.)

Para analisar o efeito Compton, é necessário levar em conta que o efeito é relativístico já que o fóton é uma partícula relativística que viaja à velocidade da luz. Isso significa que devemos usar as equações da relatividade para a variação da massa, da energia e do momento linear.

Introduzimos λ e θ do fóton incidente nas células B4 e B5. As demais quantidades calculam-se na seguinte ordem:

1. $\lambda' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos(\theta))$ com $\lambda_c = hc/E_0$ (= comprimento de onda de Compton) e $E_0 = m_0c^2$
 λ' = comprimento de onda do fóton após da colisão
2. $E_c = hc/\lambda - hc/\lambda'$ (=energia cinética do elétron)
3. pc de $(pc)^2 = E_c^2 + 2E_0E_c$
4. Ângulo de espalhamento φ do elétron da componente do momento em relação à direção y : $-pc \cdot \sin(\varphi) + hc \cdot \sin(\theta)/\lambda' = 0$
5. A equação $pc \cdot \cos(\varphi) + hc \cdot \cos(\theta)/\lambda' = hc/\lambda$ (componente do momento na direção-x) pode ser usada como controle.



Entradas:

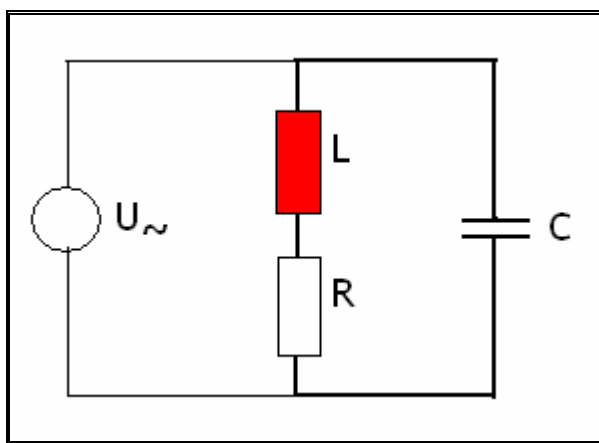
Em B29:B34 ficam as constantes e , m_0 , c , h , hc , E_0
 B34: $B\$30*B\31^2 ; B35: $=B34/B29$

D3: =D2*1000*B29; D4: =B33/D\$3; B4: =D4
 G14: =B\$27; G15: =360-(G14+G16); G16: =B\$5
 B18: =B33/B4/B29/1000; B19: =H19/1000; B20: =H20/1000
 F18: =B\$33*SEN(B\$21)/B\$22; F19: =B33/B22
 F20: =B\$23; H18: =B\$25*SEN(B\$26); H19: =F19/B29
 B21: =B5*PI()/180; B22: =B\$4+B\$33*(1-COS(B\$21))/B\$34
 B23: =B\$33*(1/B\$4-1/B\$22); B24: =B23/B29; H20: =B\$24
 B25: =RAIZ(B23*(2*B34+B23))
 B26: =ASEN(B\$33*SEN(B\$21)/(B22*B25))
 B27: =B26*180/PI()

Circuito RLC com fonte alternada

A figura mostra um circuito RLC paralelo forçado por um gerador senoidal de frequência angular ω . A impedância Z de um elemento do circuito, submetido a uma voltagem alternada, é a razão entre a queda de voltagem nos terminais do elemento e a corrente passando pelo mesmo.

Impedância do resistor: $Z = R$
 Impedância do indutor: $Z = -i\omega L$
 Impedância do capacitor: $Z = i/\omega C$



Para o valor absoluto da impedância do circuito representado, obtemos

$$|Z| = \frac{1}{\omega C} \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

A defasagem φ entre a tensão U e a corrente I é dada pela seguinte relação

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}(1 - \omega^2 LC) - \omega RC$$

($\tan \varphi$ é definido por $\text{Im}(Z)/\text{Re}(Z)$ e φ é o ângulo de fase da tensão em relação à corrente e não o ângulo de fase da corrente em relação à tensão. Assim temos: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$)

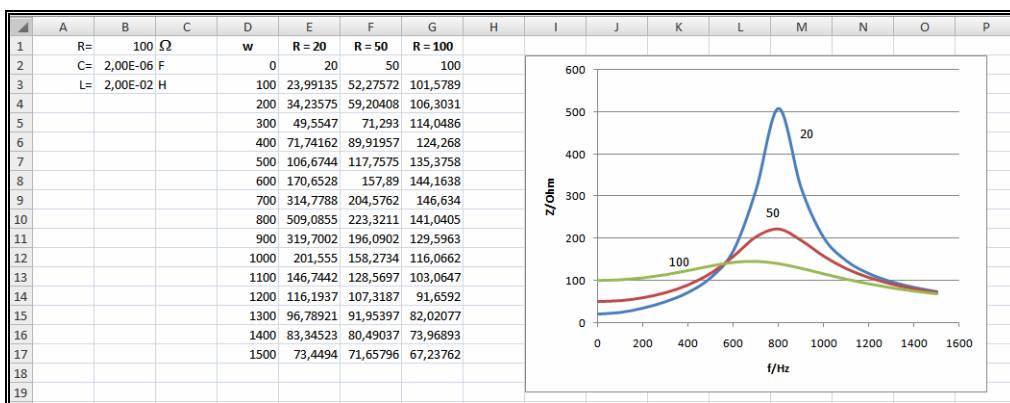
No caso de ressonância, ou seja $\varphi = 0$, resulta

$$\omega_{res}^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}$$

Na maioria dos casos, temos $R^2C/L \ll 1$ e $\omega_{res} \approx (1/LC)^{1/2}$.

As correntes parciais, I_L e I_C , nas duas ramificações do circuito podem ser muito maiores do que a corrente total. Fala-se de ressonância da corrente.

Na figura seguinte, estudamos a ressonância da impedância $|Z|$ para três diferentes valores de R .



Cada curva foi calculada por meio do seguinte programa:

```

Sub Circuito_RLC()
  'Range("D1:E2000").Clear
  R = Cells(1, 2)
  C = Cells(2, 2)
  L = Cells(3, 2)
  Pi = 3.14159
  eps = 0.000001 ' evita divisão por 0 em 1/(wC) para w=0
  n = 1 'para controlar a saída
  For f = 0 To 1500 Step 100
    w = 2 * Pi * f
    Z1 = w * L
    Z2 = 1 / ((w + eps) * C)
    Z = Z2 * ((R ^ 2 + Z1 ^ 2) / (R ^ 2 + (Z1 - Z2) ^ 2)) ^ 0.5
    n = n + 1
    Cells(n, 4) = w / (2 * Pi)
    Cells(n, 7) = Z ' deve-se adaptar à coluna a ser usada
  eps = 0
  Next f
End Sub

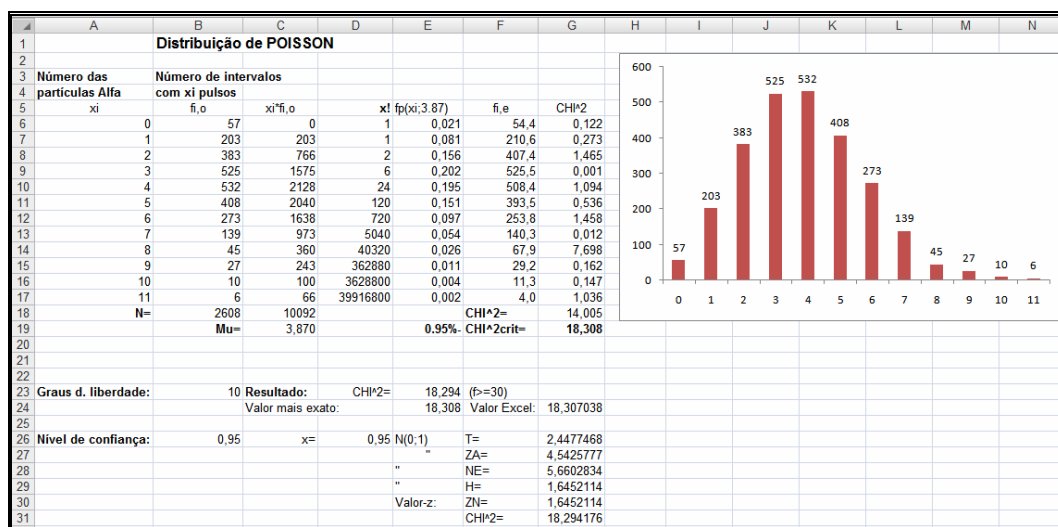
```


A distribuição de Poisson

Eventos raros obedecem muitas vezes a uma distribuição de Poisson. Ela é freqüentemente usada para modelar dados de contagem, por exemplo, para descrever o número de partículas Alfa emitidos pelo Polônio-210 num certo intervalo de tempo.

Em 1910, E. Rutherford e H. Geiger registraram 2608 vezes o número de Alfas emitidas em 7,5s. (Phil. Magazine (6) 20, 1910, p.698). Havia 6 intervalos de 7.5s com 11 ou mais eventos (pulsos).

A planilha abaixo mostra os resultados observados e o análise deles:



Para criar esta planilha, precisamos das seguintes fórmulas:

1. A função de densidade de probabilidades da distribuição de Poisson:

$$f_p(x, \mu) = \mu^x e^{-\mu} / x! \quad (1)$$

O médio aritmético fornece uma estimativa para μ . As freqüências esperadas calculamos com $f_{i,e} = N \cdot f_p(x_i, \mu)$. N = soma das freqüências observadas $f_{i,o}$.

2. Para o cálculo do valor crítico de Qui², podemos utilizar a função INV.QUI do Excel ou a seguinte expressão:

$$\chi^2 \approx f + z\sqrt{2f} + \frac{2}{3}(z^2 - 1) + \frac{z^3 - 7z}{9\sqrt{2f}} - (6z^4 + 14z^2 - 32)/(405f) \quad (2)$$

$z = 1-\alpha$ (nível de confiança) da distribuição Padrão Normal

Para $f > 30$ pode-se usar uma fórmula mais curta:

$$\chi^2 \approx f \left(1 - \frac{2}{9f} + z \sqrt{\frac{2}{9f}} \right)^3 \quad (3)$$

Entradas:

1. Nas colunas A e B ficam os valores experimentais
2. C6: =A6*B6; copiar até C17
3. D6: 1; D7: =D6*A7; copiar até D17(=fatorial)
C18: =SOMA(C6:C17); C19: =C18/B18
4. E6: =C\$19^A6*EXP(-C\$19)/D6; copiar até E17
F6: =E6*B\$18; copiar até F17
5. G6: =(F6-B6)^2/F6; copiar até G17
G18: =SOMA(G6:G17) (=quantidade de teste de Qui²)
Já que esta quantidade é menor do que o valor crítico de Qui² (=18,308), podemos supor que os dados experimentais sigam a distribuição de Poisson. Em G23 fica a função =INV.QUI(0,05;B23) para determinar o valor crítico de Qui². Este valor foi calculado para um nível de confiança de 95%. O número dos graus de liberdade é $f = 12 - 2 = 10$.
6. Para aplicar a fórmula (2), podemos escrever no E24
=B23+(2*B23)^0,5*G30+2*(G30^2-1)/3+(G30^3-7*G30)/((2*B23)^0,5*9)-(6*G30^4+14*G30^2-32)/(405*B23)
7. D26: =SE(B26<0,5;1-B26;B26)
G26: =RAIZ(-2*LN(1-D26))
G27: =2,515517+G26*(0,802853+0,010328*G26)
G28: =1+G26*(1,432788+G26*(0,189269+0,001308*G26))
G29: =G26-G27/G28
8. Em G30 fica o valor z: =SE(B26<=0,5;-G29;G29)
9. Em G31 calcula-se uma aproximação válida para $f > 30$:
=B23*(1-2/(9*B23)+G30*RAIZ(2/(9*B23)))^3
Esta fórmula usamos somente com o intuito de comparar os métodos.
O gráfico foi feito com *Inserir>Colunas>2D*. Para editar o eixo horizontal prossiga assim: Marcar o gráfico e selecione *Design>Selecionar Dados>Rótulos do Eixo Horizontal>Editar*.
Selecionar com o mouse o intervalo A6:A17>OK>OK

É aconselhável comparar este exemplo com o teste de distribuição Normal no capítulo anterior.